Geometría analítica-2º Bachiller (enero 2011)

VECTORES EN EL ESPACIO

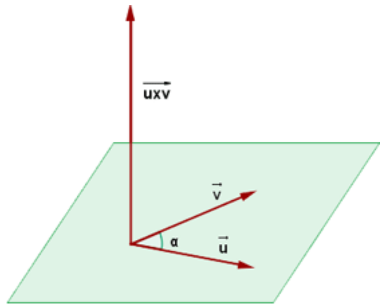
- Segmento que une dos puntos (dirección, sentido y medida-módulo).
  - A (2,1,0) y B (-3,2,3)
  - Vector $\underset{AB}{\rightarrow}$ (-3-2,2-1,3-1) = (-5,1,2)
  - Medida o módulo: $\left|\underset{AB}{\rightarrow}\right| = \sqrt{-5^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30}$
  - Distancia entre dos puntos: módulo del vector que une dichos puntos.
- Suma y resta de vectores se suman sus coordenadas.
- Vectores linealmente dependientes si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes.
- 3 vectores son linealmente independientes si el determinante de la matriz que forman es distinto de cero. Forman una base (ortogonal cuando son perpendiculares y ortonormal cuando además su módulo es igual a la unidad). Tienen distinta dirección.
  - Y son dependientes cuando uno se puede poner como combinación lineal de los otros. Son paralelos y sus coordenadas son proporcionales. Su determinante es cero. Tienen la misma dirección.
  - Se puede comprobar mediante rangos (determinantes) y mediante ecuaciones. Base canónica.
- Vectores perpendiculares si su producto escalar es cero $\underset{u}{\rightarrow}.\underset{v}{\rightarrow} = 0$
  - $\underset{u}{\rightarrow} = (u_1, u_2, u_3)$ $\underset{v}{\rightarrow} = (v_1, v_2, v_3)$
  - $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$
- Combinación lineal de tres vectores. $\underset{w}{\rightarrow} = 2\underset{u}{\rightarrow} + 3\underset{v}{\rightarrow} + 3\underset{z}{\rightarrow}$
- Vectores linealmente independientes: sus componentes no son proporcionales (determinantes distinto de cero)
- Baricentro: medianas unen el vértice con el centro del lado opuesto.
  - $B = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$
- Producto escalar de dos vectores. $\underset{u}{\rightarrow}.\underset{v}{\rightarrow} = \left|\underset{u}{\rightarrow}\right|.\left|\underset{v}{\rightarrow}\right|.\cos\alpha = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3v_3$
  - $\cos\alpha = \frac{u_1.v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}+\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}}$
  - El producto escalar de dos vectores perpendiculares u ortogonales es cero.
- Distancia entre dos puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$ $B = (x_2, y_2, z_2)$
  - $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- Vectores paralelos si sus coordenadas son proporcionales. (estos vectores son iguales y se obtienen multiplicando las coordenadas de uno por un número).
- Ángulo entre dos rectas: es el menor de los ángulos que forman los vectores directores.
- Ángulo entre dos planos es el menor de los ángulos que forman sus vectores normales.
- Ángulo entre recta y plano. Es el ángulo complementario que forman el vector director con el vector normal del plano (seno)
- Vector unitario se obtiene al dividir sus coordenadas por su módulo.
- Las coordenadas de un vector respecto a una base son los coeficientes de la combinación lineal.

- ***Producto vectorial*: *paralelogramo y triángulo*.**
    - El resultado del producto vectorial de dos vectores es un nuevo vector cuya dirección es perpendicular al mismo tiempo a los dos. Cuyo modulo es el productos de los módulos de los vectores y su sentido el de la regla del sacacorchos.

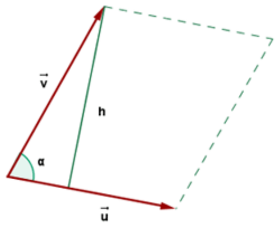
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\,\alpha$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$



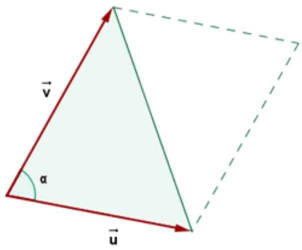
    - Área del paralelogramo coincide con el módulo del producto vectorial de los vectores que forman el paralelogramo (valor absoluto):

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\,\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



    - Área del triángulo: también se utiliza para hallar el área de un triángulo (valor absoluto)

$$A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$



    - A través del producto vectorial se calculas las coordenadas del vector director de una recta, multiplicando los vectores normales de los planos que la forman.
- *Producto mixto*: (paralelepípedo y tetraedro) es el resultado del producto escalar de un vector por el producto vectorial de otros dos vectores.
    - El **producto mixto** se representa por [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$].
    - El **producto mixto** de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

    - Volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los vectores que concurren en el mismo vértice.
    - Volumen de un tetraedro es 1/6 del producto mixto de los vectores que concurren en el mismo vértice.
    - Si tres vectores son linealmente dependientes, es decir, si son coplanarios**,** producto mixto vale 0**.**

ECUACIONES DE LA RECTA: punto A (-1,3,2) y vector de dirección $\underset{v}{\rightarrow} = (2{,}5, -3)$

- Vectorial $(x, y, z) = (-1{,}3{,}2) + k(2{,}5, -3)$
- Paramétricas $\begin{Bmatrix} x = -1 + k2 \\ y = 3 + k5 \\ z = 2 + k. -3 \end{Bmatrix}$
- Continua $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{-3}$
- Ecuación general o implícita (Ecuaciones de dos planos que se cortan en la dicha recta)
  - $5x - 2y + 11 = 0$
  - $3y + 5z - 1 = 0$
- Como pasar de una implícita a una continua, paramétrica o vectorial.
  - Igualando z a t; y resolviendo el sistema de dos incógnitas por Cramer.
    - $5x - 2y + 3z - 7 = 0$
    - $x - 3y + 5z - 3 = 0$
      - $5x - 2y = 7 - 3t$
      - $x - 3y + = 3 - 5t$
      - Paramétricas $\begin{Bmatrix} x = -\frac{15}{13} - \frac{t}{13} \\ y = \frac{8}{13} + \frac{28t}{13} \\ z = t \end{Bmatrix}$
- Por matrices $\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; vectores u y v, son los vectores normales de los planos que forman la recta y el vector (i,j,k) es el vector de dirección de la recta.
- Producto vectorial de los dos vectores normales de los planos que forman la recta, dan lugar al vector director de la recta.

ECUACIONES DEL PLANO: punto A (-1,3,2) y dos vectores (con distinta dirección, independientes) de dirección $\underset{u}{\rightarrow} = (3,-2,1)$ $\underset{v}{\rightarrow} = (2,5,-3)$

- Vectorial $(x,y,z) = (-1,3,2) + t\,(3,-2,1) + s(2,5,-3)$
- Paramétricas $\begin{Bmatrix} x = & -1 + 3t + 2s \\ y = & 3 - 2t + 5s \\ z = & 2 + t - 3s \end{Bmatrix}$
- Ecuación general o implícita (matriz de 3 vectores uno formado por la resta de dos puntos y los 2 vectores de dirección- su determinante debe ser igual a cero)
  - $x + 11y + 19z - 70 = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Ax+By+Cz+D=0

- Ecuación segmentaria del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (a, b y c puntos de cortes con sus respectivos ejes): $a = \frac{-D}{A}$ $b = \frac{-D}{B}$ $c = \frac{-D}{C}$
- Si un plano contiene a una recta su vector de dirección pertenece al plano. Con dos puntos del plano también se puede obtener otro vector de dirección
- Como pasar de la ecuación general a la paramétrica o vectorial. Se buscan dos parámetros igualando x a t y z a s, despejando la y. 4x-2y+5z =8
  - Paramétricas $\begin{Bmatrix} x = & t \\ y = & 4 - 2t - \frac{5}{2}s \\ z = & s \end{Bmatrix}$
- Vector normal del plano 5x-2y+3z-9=0, es el vector perpendicular al plano (5,-2,3). Se puede calcular a ecuación del plano a partir de este vector y un punto.
- (A,B,C) Coordenadas del vector del plano.

PUNTOS Y PLANOS

- Punto medio de un segmento, semisuma de las coordenadas de los puntos extremos.
  $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$. $y_m = \frac{y_1+y_2}{2}$ $z_m = \frac{z_1+z_2}{2}$
- Baricentro: la media de las coordenadas de los vértices.
  - $x_m = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$. $y_m = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ $z_m = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
- Puntos alineados: 3 puntos están alineados si están una mima recta y por tanto el rango de los vectores determinados por ellos es 1.
- Puntos coplanarios (están en un mismo plano): 2 o más vectores son coplanarios si son dependientes y su rango es 2. Dos o más puntos son coplanarios si los vectores determinados por ellos son coplanarios.
- Planos cartesianos:
  - Plano 0XY z=0
  - Plano 0XZ y=0
  - Plano 0YZ x=0
- Ejes cartesianos:
  - Eje 0X x=t $\begin{pmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$ vector dirección (1,0,0)
  - Eje 0Y y=t $\begin{pmatrix} x = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}$ vector dirección (0,1,0)
  - Eje 0Z z=t $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$ vector dirección (0,0,1)
  -
- Rectas paralelas cuando solo varía el término independientes D de las ecuaciones de los planos que la forman y el resto de términos son proporcionales.
- Planos paralelos cuando solo varía el término independiente D de sus ecuaciones y el resto de términos son proporcionales.

Posiciones de dos rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{l} m_1x+n_1y+p_1z=q_1 \\ m_2x+n_2y+p_2z=q_2 \end{array}\right\}$$

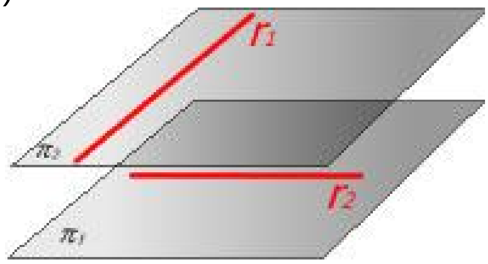
Llamaremos A a la matriz del ***sistema formado por esas cuatro ecuaciones***, y A* a la ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} \qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{array}\right)$$

Éstas son las posibilidades:

1. rang(A) = 2, rang(A*)=2. Entonces, son dos rectas coincidentes. (SCI)
2. rang(A) = 2, rang(A*)=3. Entonces, son dos rectas paralelas, distintas. (SI)
3. rang(A) = 3, rang(A*)=3. Entonces, son dos rectas secantes; su punto de corte es la solución del sistema. (SCD)

4. ragn (A) = 3 ,rang(A*)=4, es decir, **Det(A*) ≠ 0**. Entonces, se dice que las **rectas se cruzan.** (SI)



Dos rectas que se cruzan siempre podrán situarse en dos planos paralelos. Además, éste es el único caso en el que no existe un plano que contenga las dos rectas (rectas no coplanarias)

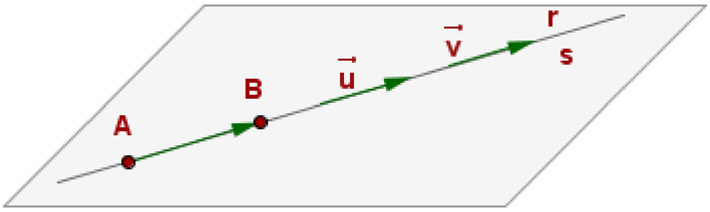
Rectas definidas por un punto y un vector

Si la recta r viene determinada por $A(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y la recta s por $B(x_2,y_2,z_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, la **posición relativa de r y s** viene dada por la posición de $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ y $\vec{v}$

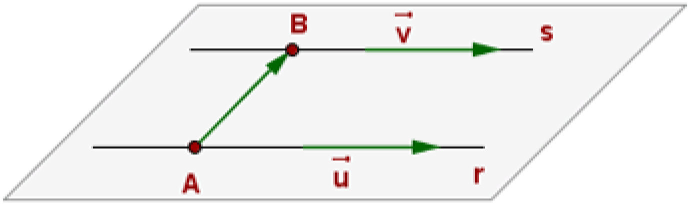
Si $\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}=\dfrac{u_3}{v_3}$ hay dos posibilidades:

1. Rectas coincidentes si

$$\frac{x_2-x_1}{u_1}=\frac{y_2-y_1}{u_2}=\frac{z_2-z_1}{u_3}.$$



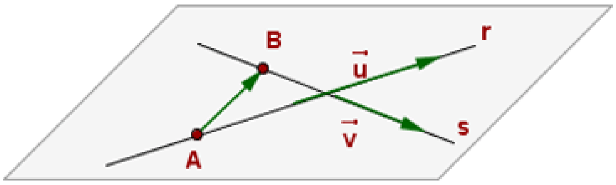
2. Rectas paralelas si $\frac{x_2-x_1}{u_1}\neq\frac{y_2-y_1}{u_2}$ o $\frac{x_2-x_1}{u_1}\neq\frac{z_2-z_1}{u_3}$.



Si $\frac{u_1}{v_1}\neq\frac{u_2}{v_2}\neq\frac{u_3}{v_3}$ hay otras dos posibilidades:

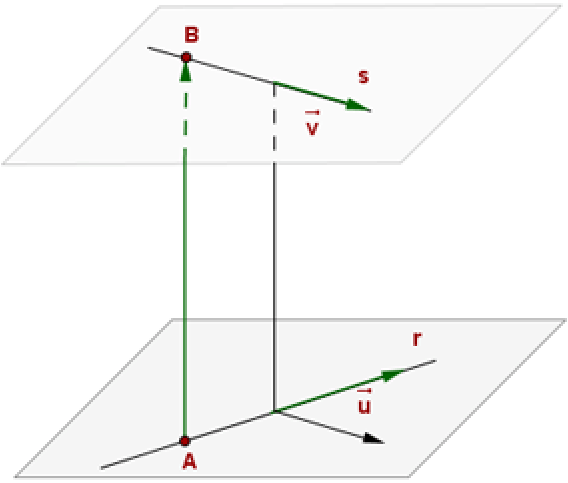
3. Rectas secantes (Rango = 2) si .

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & u_1 & v_1 \\ y_2-y_1 & u_2 & v_2 \\ z_2-z_1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}=0$$



4. Rectas que se cruzan (Rango = 3) si.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & u_1 & v_1 \\ y_2-y_1 & u_2 & v_2 \\ z_2-z_1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}\neq 0$$



Posiciones de recta y plano:

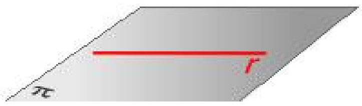
$$r: \left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}\right\} \qquad \pi: \; mx + ny + pz = q$$

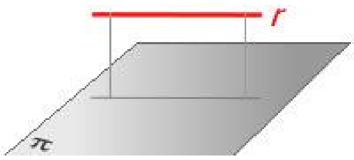
Llamaremos A a la matriz del ***sistema formado por esas tres ecuaciones***, y A* a la ampliada.

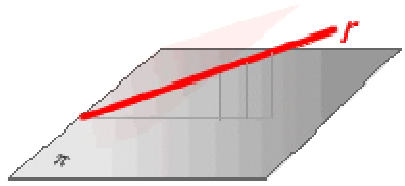
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ m & n & p \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m & n & p & q \end{array}\right)$$

Éstas son las posibilidades:

1. rang(A) = 2, rang(A*)=2. Entonces, la recta está contenida en el plano (fig. 1).(SCI)
2. rang(A) = 2, rang(A*)=3. Entonces, la recta es paralela al plano, y no contenida en él (fig. 2). (SI) El vector de dirección de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.
3. rang(A) = 3, rang(A*)=3. Entonces, se dice que la recta es secante al plano. El punto de corte es la solución del sistema (fig. 3) (SCD)







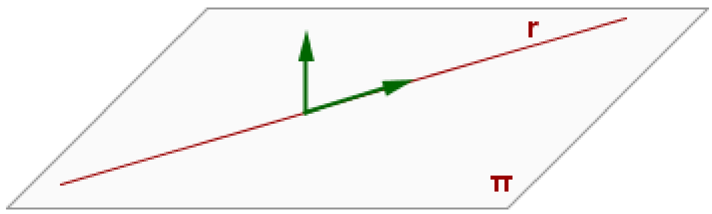
Es importante darse cuenta de que el **paralelismo de recta y plano** se da exactamente cuando **Det(A) = 0**.

La recta viene definida por un punto y un vector

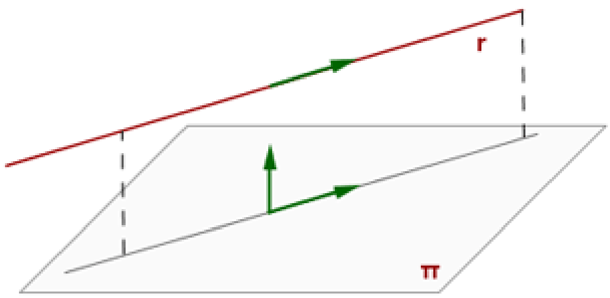
Sea una recta definida por el punto A y el vector $\vec{u}$. y un plano π cuyo rector normal es $\vec{n}$. Las **posiciones relativas de la recta y el plano** son:

Posición	$\vec{u}\cdot\vec{n}$	A
Recta contenida en el plano	**= 0**	$\in \pi$
Recta y plano paralelos	**= 0**	$\notin \pi$
Recta y plano secantes	**≠ 0**	

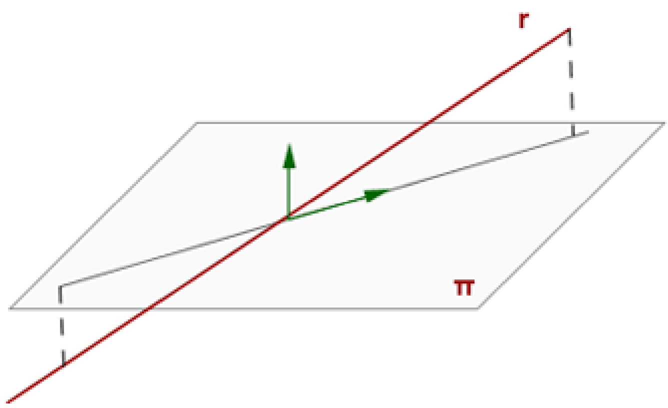
Recta contenida en el plano



Recta y plano paralelos



Recta y plano secantes

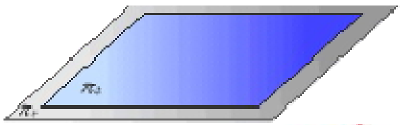


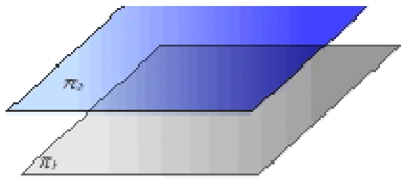
Otra forma es sustituyendo los valores de la recta en forma paramétrica en la ecuación del plano. Si nos da un valor real para t, son secantes y se cortan en ese punto; si no obtenemos un valor para t son coincidentes si el punto de la recta pertenece al plano y son paralelas si el punto de la recta no pertenece al plano.

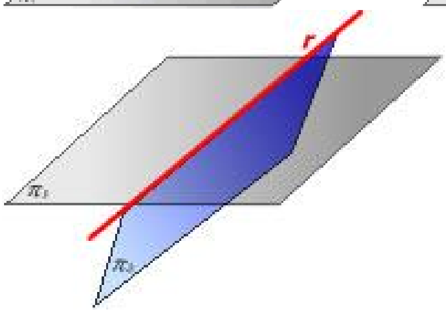
Posiciones de dos planos: $\pi_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \qquad \pi_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

Para el sistema formado por ambas ecuaciones, $\begin{Bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{Bmatrix}$, caben las siguientes posibilidades:

1. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$. Entonces los planos coinciden (fig. 1) **R(A)=R(A*)=1 (SCI)**
2. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$. Entonces son planos paralelos (fig. 2) **R(A)=1 y R(A*)=2 (SI)**
3. En cualquier otro caso, el rango del sistema es 2, y entonces los planos definen una recta (fig. 3) ***R(A)=R(A*)=2 (SCI)*** $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$







Posiciones de 3 planos:

$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \qquad \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \qquad \pi_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

Llamaremos A a la matriz del ***sistema formado por esas tres ecuaciones***, y A* a la ampliada.

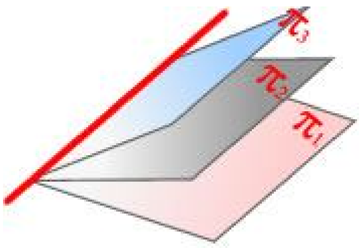
Éstas son las posibilidades:

1. rang(A) = 1, rang(A*)=1. Entonces, los 3 planos $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ coinciden. (SCI)
2. rang(A) = 1, rang(A*)=2. Entonces, son 3 planos $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ paralelos (Dos de ellos pueden coincidir.) (SI)

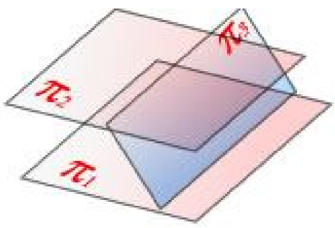
3. rang(A) = 2, rang(A*)=2. Entonces, los 3 planos contienen $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ una misma recta (planos de un *haz*) (SCI) (Pueden ser dos coincidentes y el otro secante)

4. rang(A) = 2, rang(A')=3. Entonces, hay dos posibilidades: (SI)
   a) Hay 2 planos paralelos, y el otro los corta
   b) Los tres son caras de un prisma triangular (se cortan dos a dos)
   $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$

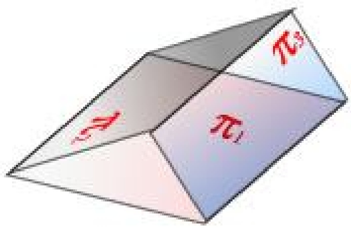
5. rang(A) = 3, rang(A')=3. Entonces, los planos tienen exact.un punto común (caras de *triedro*) (SCD)



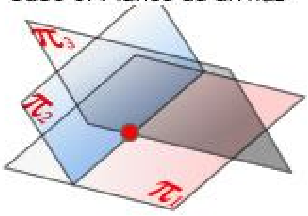
Caso 3: Planos de un *haz*



Caso 4a: Dos paralelos y otro no



Caso 4b: Caras *prisma triangular*



Caso 5: Tres caras de un triedro

Las **posicones relativas de los tres planos** vienen dada por la siguiente tabla:

r	r'		Posición
3	3		1. Planos secantes en un punto
2	3	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	2.1 Planos secantes dos a dos (prisma). 2.2 Dos planos paralelos y el tercero secante.
2	2	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	3.1 Planos secantes y distintos.(Haz de planos) 3.2 Dos planos coincidentes y uno secante.
1	2	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	4.1 Planos paralelos y distintos dos a dos. 4.2 Planos paralelos y dos coincidentes.
1	1		**5. Planos coincidentes.**

HAZ DE PLANOS PARALELOS:

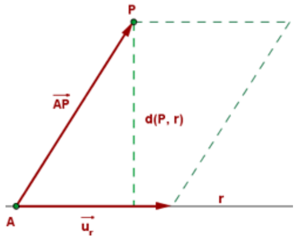
- Varían unos de otros en el término independiente (se calculan sabiendo un punto).
- Ax + By + Cz +k = 0 (calculamos K dependiendo del punto por donde pasan).

HAZ DE PLANOS DE EJE R

- Hallamos k sustituyendo en las ecuaciones el valor del punto por donde pasan (deben pasar por un punto y ser paralelos a una recta
- Ax + By + Cz + D + k (A'x + B'y +C'z +D')=0

DISTANCIAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

- **Proyección de un punto sobre un plano:**
  - Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto (vector director el vector normal del plano.)
  - Calculamos la intersección de dicha recta con el plano.
  - Punto simétrico: el punto proyectado sobre el plano es el punto medio entre un punto y su simétrico.
- **Proyección de un punto sobre una recta:**
  - 1º método: hallar plano perpendicular a la recta que contiene al punto (vector normal del plano coincide con el vector director de la recta). Calculamos la intersección del plano y la recta.
  - 2º método: buscamos un punto genérico de la recta r (ecuación paramétrica). El vector que forman el punto con el punto genérico y el vector directo de la recta son perpendiculares por lo que su producto escalar es cero. Obtenemos el parámetro y calculamos las coordenadas.
- **Proyección de una recta sobre un plano**
  - Si son perpendiculares se calcula hallando la intersección.
  - Si son incidentes: recta formado por el punto de corte y la proyección de un punto cualquiera de la recta. Otra forma buscamos un plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano (vector director de la recta y vector normal del otro plano); la recta proyección es la intersección de los dos planos.
  - Si son paralelos, se eligen dos puntos de la recta y se proyectan, la nueva recta se forma con los puntos proyectados.
- **Recta simétrica de otra recta respecto a un plano:**
  - Si es paralela se buscan dos puntos simétricos y se forma la nueva recta.
  - Si es incidente un punto es el de corte y el otro uno simétrico de uno cualquiera elegido de la recta, con esos dos se forma la nueva recta.
- **Recta que se apoya en otras dos:**
  - Si pasa por un punto (1,2,3):
    - Plano que contiene al punto (1,2,3) y a una recta.
    - Plano que contiene al punto (1,2,3) y a la otra recta.
    - Intersección de esos dos planos es la recta buscada.
  - Si es paralela a una recta dada (lleva el vector director de está).
    - Plano que contiene a una recta con dicho vector director.
    - Plano que contiene a otra recta con dicho vector director.
    - Intersección de esos dos planos es la recta buscada.
- **Distancia entre dos puntos: módulo del vector que los une.**
  - $\boldsymbol{d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$
- **Distancia de un punto al plano.** $P\ (x_0, y_0, z_0)$ y plano $\pi = Ax + By + Cz + D$
  - $\boldsymbol{d(p,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$
- **Distancia de un punto a una recta:** se halla su proyección [plano que contiene al punto y es perpendicular a la recta (módulo del vector que forman punto de corte entre el plano y la recta y el punto indicado)]
  - También por vectores (vector director de la recta, vector distancia y vector que une el punto con uno cualquiera de la recta elegido al azar, deben ser dependiente y calculamos el vector distancia por matrices).



$$d(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}_r|}$$

- **Distancia entre dos rectas paralelas**, se elige un punto de una de ellas y se calcula la distancia del mismo a la otra recta.

- También se halla un plano perpendicular a la rectas (r y s) u que pase por un punto de la recta r (Pr). Intersección del plano con la recta s (Pb). La distancia entre las dos rectas el igual a la distancia entre dichos puntos (Pr y Pb).

- **Distancia entre dos rectas que se cruzan**, se calcula sobre la perpendicular común.

$$d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

  - También plano que contenga a una recta y sea paralelo a la otra. Distancia de un punto de la recta paralela a ese plano.
  - También hallando el vector perpendicular a las dos (por la resta de las ecuaciones paramétricas). Su módulo es la distancia.
- **Distancia entre planos paralelos**

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- **Recta perpendicular común a otras dos**
  - Buscamos un vector perpendicular a los dos vectores directores de la recta (producto vectorial).
  - Plano que contiene a una recta y a dicho vector perpendicular.
  - Plano que contiene a la otra recta y a dicho vector perpendicular.
  - La recta buscada es la intersección de esos dos planos.
- **Recta paralela a dos planos** es también paralela a la recta que forman esos dos planos.
- Las rectas paralelas solo varían en el término independiente.
- Si un plano es perpendicular a otro, el vector normal del segundo es un vector director del primer plano.
- Si una recta es perpendicular a un plano su vector director coincide con el vector normal del plano.
- Si un plano es perpendicular a una recta, los vectores normales de los planos que la forman son los vectores directores de ese nuevo plano.
- Si una recta y un plano son paralelos el vector de dirección de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares. Su producto escalar es cero.
- Si una recta y un plano son perpendiculares el vector de dirección de la recta y vector normal del plano son paralelos. En consecuencia son proporcionales.
- Para hallar donde se cortan una recta y un plano se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano y se calcula el parámetro.
- Recta que pasa por un punto y está contenida en un plano y es perpendicular a otra recta se halla como la intersección de dos planos:
  - Plano contenida en ella
  - Plano cuyo vector normal es el de la recta perpendicular a dicha recta y su variable D se halla sustituyendo el punto en la ecuación del plano.